J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 347-354

THEOREME GENERAL D'EQUIVALENCE POUR LES PSEUDOGROUPES DE LIE PLATS TRANSITIFS

CLAUDETTE BUTTIN[1] & PIERRE MOLINO

1. *C'est une conjecture bien connue* (annoncée par exemple dans [5]) que toute G-structure (usuelle ou d'ordre supérieur) formellement plate, c'est-à-dire formellement équivalente à une structure plate, est plate. On donne ici une démonstration de cette conjecture en s'appuyant sur les résultats antérieurs de Guillemin (voir [2] et [3]) et Singer-Sternberg (voir [7]) et en utilisant une récurrence portant sur la dimension des variétés considérées.

Dans [3], V. Guillemin, démontrant une conjecture d'Elie Cartan, fournit un outil essentiel pour aborder le problème général d'équivalence: la construction de suites de Jordan-Hölder généralisées pour l'algèbre formelle d'un pseudogroupe de Lie. La difficulté qui intervient dans l'application de cette technique au cas des pseudogroupes de Lie plats est bien évidente: si $L \supset I_1 \supset \cdots \supset I_k = \{0\}$ est une suite de Jordan-Hölder généralisée pour l'algèbre formelle L d'un pseudogroupe de Lie plat, il n'y a aucune raison pour que les quotients successifs L/I_i soient eux-mêmes des algèbres formelles plates.

Ici, on travaillera donc avec des idéaux particuliers—que l'on peut en un certain sens appeler idéaux plats. En utilisant l'hypothèse de récurrence sur la dimension, on arrivera alors à se ramener au cas d'un pseudogroupe de Lie plat admettant sur la variété modèle $\boldsymbol{R}^n$ un feuilletage invariant tel que: a) l'idéal de l'algèbre formelle associé à ce feuilletage soit ou bien abélien, ou bien non abélien minimal; b) l'algèbre quotient soit réduite aux translations. On pourra alors terminer la démonstration en utilisant soit les théorèmes d'existence pour les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants (voir [6]) soit les résultats de V. Guillemin sur les idéaux fermés non abéliens minimaux de l'algèbre formelle d'un pseudogroupe de Lie (voir [3]).

2. Dans ce paragraphe nous étudions les *idéaux fermés plats d'une algèbre formelle plate*. Soit L l'algèbre formelle d'un pseudogroupe de Lie transitif plat sur $\boldsymbol{R}^n$, munie de la topologie définie par la filtration. Suivant Singer-Sternberg (voir [7]), on pose:

$$L = \boldsymbol{R}^n \oplus g \oplus g^1 \oplus \cdots \oplus g^p \oplus \cdots \tag{1}$$

Communicated by D. C. Spencer, January 9, 1973.

[1] Depuis la rédaction en commun de ce travail, Claudette Buttin a prématurément disparu, en acût 1972. Cette publication posthume est en même temps un hommage à sa mémoire — C'est aussi pour moi le témoignage d'une ancienne et fraternelle amitié — Pierre Molino.

où les relations $[g^i, g^j] \subset g^{i+j}$ sont vérifiées pour $i, j, i+j \geq -1$.

Un idéal I fermé de L *sera dit plat* s'il est de la forme:

$$I = W \oplus h \oplus h^1 \oplus \cdots \oplus h^p \oplus \cdots . \tag{2}$$

On lui associe alors une sous-algèbre plate fermée transitive de L définie par:

$$A(I) = \boldsymbol{R}^n \oplus h \oplus \cdots \oplus h^p \oplus \cdots . \tag{3}$$

Si maintenant on considère une sous-algèbre fermée plate de L:

$$B = V \oplus \gamma \oplus \gamma^1 \oplus \cdots \oplus \gamma^p \oplus \cdots \tag{4}$$

alors on vérifie que le plus grand idéal $D_L^\infty(B)$ de L contenu dans B est plat; en particulier $D_L^\infty(A(I)) \supseteq I$.

Notons que si I_1 est un idéal fermé arbitraire de L, le gradué associé est un idéal fermé plat $\hat{I}_1$.

Ceci étant, considérons un sous-espace V_1 de $\boldsymbol{R}^n$ invariant par g et *minimal*. On peut lui associer la sous-algèbre plate fermée de L:

$$B_{V_1} = V_1 \oplus g \oplus g^1 \oplus \cdots \oplus g^p \oplus \cdots \tag{5}$$

et l'idéal fermé plat $D_L^\infty(B_{V_1})$.

Mais V_1, considéré comme sous-algèbre de L, engendre dans L un idéal I_{V_1} dont l'adhérence $\bar{I}_{V_1}$ sera un idéal fermé de L *minimal et plat*. Bien entendu, $\bar{I}_{V_1} \subset D_L^\infty(B_{V_1})$.

3. Dans ce paragraphe *la différentiabilité est entendue au sens* C^∞. Une G-structure d'ordre supérieur est dite formellement plate si les obstructions tensorielles à la platitude mises en évidence par Bernard (voir [1]) et Guillemin (voir [2]) sont nulles.

Soit Γ un pseudogroupe de Lie transitif plat standard sur $\boldsymbol{R}^n$, d'algèbre formelle (1). Sur la variété différentiable M de dimension n on considère une structure formellement équivalente à la structure standard, c'est-à-dire une presque-Γ-structure au sens de Guillemin-Sternberg (voir [4]). On veut démontrer que cette presque-Γ-structure est une Γ-structure, c'est-à-dire *admet des coordonnées locales adaptées* au voisinage de chaque point.

La démonstration se fera *par récurrence sur la dimension n*. On supposera donc démontré que sur les variétés de dimension $\leq n-1$ toute structure formellement plate est plate.

Soit G le groupe d'isotropie linéaire de Γ, d'algèbre de Lie g. Si Γ est de type fini, le résultat est connu (voir [2]). Si Γ est de type infini et si le groupe G est irréductible, le résultat se déduit des théorèmes de classification (voir [7]).

On peut donc supposer que G laisse invariant un sous-espace de $\boldsymbol{R}^n$. Soit V_1 un sous-espace minimal invariant. En passant au besoin à une structure conjuguée on se ramène au cas où $V_1 = \boldsymbol{R}^m$. G est donc un groupe de matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} g^i_j & g^i_{j*} \\ 0 & g^{i*}_{j*} \end{bmatrix}, \qquad i, j = 1, \cdots, m; i^*, j^* = m + 1, \cdots, n .$$

Γ laisse invariant sur $\boldsymbol{R}^n$ le feuilletage parallèle à $\boldsymbol{R}^m$. La presque-structure considérée définit sur M un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension $(n - m)$. Soit N une variété quotient locale de M par ce feuilletage.

4. *La première étape consiste à se ramener* au cas où, avec les notations du paragraphe 2, l'algèbre quotient de L par l'idéal fermé $D^\infty_L(B_{V_1})$ ne contient que les translations (i.e., est isomorphe à R^{n-m}). Ici $V_1 = \boldsymbol{R}^m$. Le raisonnement utilise un passage au quotient dans les espaces de repères d'ordre supérieur, et l'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

Les repères d'ordre supérieur de M adaptés à la presque-Γ-structure étudiée définissent des repères d'ordre supérieur transverses au feuilletage $\mathscr{F}$. Pour tout entier $k > 0$, soit $E^k(M, G^k)$ le fibré des repères d'ordre k adaptés à la structure. G^k est un sous-groupe de Lie du groupe linéaire d'ordre k, $GL^k_{(n)}$. On a un homomorphisme naturel $G^k \to GL^k_{(n-m)}$ dont on notera G^k_T l'image. Soit $E^k_T(M, G^k_T)$ le fibré des repères transverses associés à E^k. On a un morphisme $\pi^k\colon E^k \to E^k_T$ qui définit E^k_T comme fibré principal quotient de E^k.

Ceci étant, on a:

Lemme 1. *E^k_T est localement l'image réciproque, par la projection $p\colon M \to N$, d'une structure formellement plate $e^k_T(N, G^k_T)$ sur N.*

En effet, cette propriété est évidente pour la structure modèle. Par ailleurs elle ne dépend que des jets d'ordre supérieur de la structure en tout point, donc elle est conservée par équivalence formelle.

Soit $p^k\colon E^k_T \to e^k_T$ la projection naturelle, qui est un morphisme de fibrés principaux d'application projetée $p\colon M \to N$.

Pour tout $k > 0$ on a $e^{k+1}_T \subset e^{k(1)}_T$. Il existera un rang l_0 à partir duquel cette inclusion deviendra une égalité. On considère désormais un rang $k \geq l_0$. La structure $e^k_T(N, G^k_T)$ étant formellement plate, est plate d'après l'hypothèse de récurrence. On pourra donc trouver (sur N) des coordonnées locales $\{y^1, \cdots, y^{n-m}\}$ adaptées à cette structure. Soit s^k_T la section locale de e^k_T définie par ce système de coordonnées.

Lemme 2. *L'image réciproque des points de la section s^k_T par la projection $p^k \circ \pi^k\colon E^k \to e^k_T$ définit une sous-structure formellement plate $E'^k(M, G'^k)$ de la structure E^k considérée. Ici G'^k est le noyau de l'homomorphisme $G^k \to G^k_T$.*

En effet, si $Z'^k \in E'^k$, on pourra par construction trouver un jet d'ordre arbitrairement grand de coordonnées locales adaptées à E'^k passant par ce point: il suffit de projeter Z'^k sur e^k_T, puis de remonter à l'aide de la section s^k_T dans e^{k+l}_T et de choisir alors dans la préimage du point obtenu par $p^{k+l} \circ \pi^{k+l}$ un repère adapté d'ordre $k + l$.

On s'est donc ramené, pour démontrer la platitude de la presque-Γ-structure considérée, à démontrer la platitude d'une presque-Γ'-structure (locale) subordonnée à la précédente, où Γ' est un pseudogroupe de Lie plat transitif standard sur $\boldsymbol{R}^n$ ayant pour groupe d'isotropie linéaire un groupe de matrices G' dont les éléments ont la forme:

$$\begin{bmatrix} g^i_j & g^i_{j*} \\ 0 & \mathrm{id}_{(n-m)} \end{bmatrix}.$$

Notons que $\boldsymbol{R}^m$ est encore, pour G', un *sous-espace invariant* mais n'est plus, en général, minimal. On aura donc, le cas échéant, à *itérer le procédé de réduction précédent*, en considérant un sous-espace V'_1 de $\boldsymbol{R}^m$ invariant par G' et minimal. Au bout d'un nombre fini (pour des raisons de dimension) d'étapes, on se ramène au cas où, avec les notations précédentes, $\boldsymbol{R}^m$ *est un sous-espace invariant par G' et minimal.*

On voit qu'à chaque étape de la réduction les idéaux fermés qui correspondent aux passages au quotient utilisés sont des idéaux pour l'algèbre formelle correspondant à cette étape de la réduction (mais pas nécessairement des idéaux de l'algèbre initiale L). Autrement dit le procédé ne se limite pas à l'utilisation d'une suite de Jordan-Hölder généralisée pour l'algèbre formelle L.

5. *Dans le cas où $m = 1$* et où les matrices de G' sont de la forme:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le problème d'équivalence pour la presque-Γ'-structure se ramène à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants avec seconds membres. On dispose pour cette situation de théorèmes généraux d'existence de solutions (voir [6]). Dans ce cas le théorème est donc démontré.

6. *Reste le cas où G' induit sur $\boldsymbol{R}^m$* un groupe de transformations *irréductible*.

L'étape suivante consistera à se ramener au cas où l'idéal fermé de l'algèbre formelle L' de Γ' associé au feuilletage par $\boldsymbol{R}^m$ (sur la variété modèle $\boldsymbol{R}^n$) est *minimal*. Autrement dit, avec les notations du paragraphe 2, on veut se ramener au cas[2] où $\bar{I}_{V_1} = D^\infty_{L'}(B_{V_1})$.

En général, pour Γ', il n'en est pas ainsi: notons $E'^k_0(\boldsymbol{R}^n, G'^k)$ l'espace des repères d'ordre k adaptés à la Γ'-structure standard. Dans E'^k_0 l'idéal minimal plat fermé associé à $V_1 = \boldsymbol{R}^m$ *définit* un feuilletage invariant $\mathscr{F}'^k_0$ au-dessus du

[2] On remarquera que dans ce cas $[L', L'] \subset D^\infty_{L'}(B_{V_1})$.

feuilletage de $\boldsymbol{R}^n$ par $\boldsymbol{R}^m$. En fait, on peut choisir k assez grand pour que l'idéal minimal considéré soit *défini par* ce feuilletage $\mathscr{F}_0'^k$.

Si $W_0'^k$ est la variété quotient de $E_0'^k$ par ce feuilletage $\mathscr{F}_0'^k$, $W_0'^k$ est le fibré produit $\boldsymbol{R}^{n-m} \times H^k$, où H^k est un groupe quotient du groupe G'^k. La préimage de la section canonique de ce fibré par la projection $E_0'^k \to W_0'^k$ est une sous-structure plate de $E_0'^k$, que nous noterons $E_0''^k(\boldsymbol{R}^n, G''^k)$. C'est une Γ''-structure plate standard, qui sera le modèle de la réduction (locale) cherchée à cette étape.

Soit $E'^k(M, G'^k)$ l'espace des repères d'ordre k adaptés à la presque-Γ'-structure (locale) considérée. Au feuilletage $\mathscr{F}_0'^k$ du modèle $E_0'^k$ correspond un feuilletage $\mathscr{F}'^k$ de E'^k, et la variété quotient (locale) de E'^k par ce feuilletage est un fibré principal W'^k de groupe structural H^k et dont la base dans N peut maintenant être identifiée, étant munie de coordonnées locales, à un ouvert de $\boldsymbol{R}^{n-m}$.

On cherche une section (locale) du fibré principal $W'^k(\boldsymbol{R}^{n-m}, H^k)$ dont la préimage par la projection $E'^k \to W'^k$ soit une structure formellement plate, c'est-à-dire une presque-Γ''-structure. Résoudre ce problème c'est *résoudre un système différentiel sur ce fibré principal.*

En fait, ce problème est un problème d'équivalence, assez sembable à celui traité au paragraphe 4. Mais ici, la structure quotient n'est pas plate. Elle est cependant d'un type très particulier que nous allons préciser maintenant.

Si $E_0'^{k+l}$ est l'espace des repères d'ordre $k + l$ adaptés à la Γ'-structure standard, $E_0'^{k+l}$ est un espace de repères (d'ordre l) sur $E_0'^k$. Par passage au quotient (analogue à 4) $E_0'^{k+l}$ définit un espace de repères d'ordre l sur $W_0'^k$: $e_0'^l(W_0'^k, g'^l)$. On obtient ainsi une structure transitive sur $W_0'^k$, dont le pseudogroupe associé γ^k est un pseudogroupe d'automorphismes du fibré principal $W_0'^k = \boldsymbol{R}^{n-m} \times H^k$ de la forme:

$$(y, h) \mapsto (y + y_0, \varphi(y)h) \ . \tag{6}$$

De façon analogue, pour la presque-Γ'-structure, les repères adaptés E'^{k+l} définissent un espace $e'^l\,(W'^k, g'^l)$ de repères d'ordre l sur W'^k (pour tout $l > 0$). On obtient ainsi une presque-γ^k-structure sur W'^k, et le problème précédent *se ramène à démontrer que*, pour un pseudogroupe du type γ^k, *toute presque-γ^k-structure est une γ^k-structure.* C'est ce qui va être fait au paragraphe suivant.

7. Nous discutons *le problème d'équivalence pour les γ^k-structures.* Considérons une suite de Jordan-Hölder (ordinaire!) pour l'algèbre de Lie du groupe H^k. Une telle suite permet de ramener, par passages au quotient (locaux) successifs, le problème d'équivalence pour les γ^k-structures au problème d'équivalence pour les γ-structures, où γ est un pseudogroupe de Lie de transformations du fibré principal produit $\boldsymbol{R}^{n-m} \times H$ de la forme:

$$(y, h) \mapsto (y + y_0, \varphi(y)h) \ , \tag{6'}$$

où H est simple.

Dans ces conditions, la projection $\boldsymbol{R}^{n-m} \times H \to \boldsymbol{R}^{n-m}$ définit un feuilletage invariant par γ, et l'idéal correspondant i de l'algèbre formelle l de γ est ou bien abelién (si $\dim H = 1$) ou bien non abélien minimal.

Dans le premier cas, comme au paragraphe 5, le problème d'équivalence sera résolu par un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.

Dans le second cas on aura à distinguer suivant que H admet ou non une structure de groupe complexe (ce qui revient, avec les notations de V. Guillemin [3, § 4], à distinguer suivant que $\Delta_l = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$).

a) *Si H n'est pas un groupe complexe*, l'idéal maximal j de i est défini par les γ-champs de vecteurs verticaux suivant la fibration et nuls sur une fibre. i/j s'identifie à l'algèbre de Lie de H. Le normalisateur n de j dans l contient les γ-champs qui, en un point, sont tangents à la fibre. Dans ces conditions, l'étude des idéaux minimaux non abéliens due à V. Guillemin [3] donne le résultat suivant: les équations de γ se réduisent, avec les notations de (6′), à un changement linéaire de variable près, à:

(7) φ dépend arbitrairement de certaines des variables $y^1, \cdots, y^{n-m}$ et pas du tout des autres.

Dans cette situation, le problème d'équivalence se réduit à un système de Pfaff formellement intégrable, et le résultat s'obtient donc par simple application du théorème de Frobenius.

b) *Si H est un groupe complexe*, la situation est légèrement plus compliquée. Une étude analogue à la précédente donne le résultat suivant: on aura une décomposition $\boldsymbol{R}^{n-m} = \boldsymbol{C}^p \oplus \boldsymbol{R}^q$ $(2p + q = n - m)$ et les équations de γ seront de la forme (à changement linéaire de variable près):

(7′) φ dépend analytiquement de $Z^1, \cdots, Z^p$, arbitrairement de certaines des variables $y^{2p+1}, \cdots, y^{2p+q}$ et pas du tout des autres.

Une fois résolu le système de Pfaff sous-jacent au problème d'équivalence, on est ramené au cas où les équations de γ se réduisent à:

(7″) φ dépend analytiquement de $Z^1, \cdots, Z^p$ et arbitrairement de $y^{2p+1}, \cdots, y^{2p+q}$.

Le problème d'équivalence se présentera alors ainsi: sur $\boldsymbol{C}^p \oplus \boldsymbol{R}^q$ on aura un fibré principal $E(\boldsymbol{C}^p \oplus \boldsymbol{R}^q, H)$ avec au-dessus de chaque feuille parallèle à $\boldsymbol{C}^p$ une structure de fibré principal presquecomplexe formellement intégrable (donc complexe d'après le théorème de Newlander-Nirenberg). Et le problème sera de choisir une section analytique sur chaque feuille différentiablement en fonction de $y^{2p+1}, \cdots, y^{2p+q}$. Ce qui est toujours possible: on se donnera au-dessus du sous-espace $\boldsymbol{R}^q$ de $\boldsymbol{C}^p \oplus \boldsymbol{R}^q$, différentiablement en fonction de $y^{2p+1}, \cdots, y^{2p+q}$, un jet infini de section le long des feuilles parallèles à $\boldsymbol{C}^p$, ce qui déterminera une solution locale.

8. *On s'est en définitive ramené* à la situation suivante: on a une presque-Γ''-structure locale dont il faut démontrer la platitude. Ici Γ'' est un pseudogroupe de Lie transitif plat standard sur $\boldsymbol{R}^n$ qui laisse invariant le feuilletage parallèle à $\boldsymbol{R}^m$, tel que l'idéal fermé I'' de son algèbre formelle L'' associé à ce feuilletage soit *minimal*, et tel que son groupe d'isotropie linéaire G'' agisse irréductiblement sur $\boldsymbol{R}^m$. Les matrices de G'' sont donc de la forme:

$$\begin{bmatrix} g^i_j & g^i_{j^*} \\ 0 & \mathrm{id}_{n-m} \end{bmatrix}, \qquad i, j = 1, \cdots, m; \; i^*, j^* = m+1, \cdots, n,$$

et le groupe g'' des matrices associées $[g^i_j]$ est irréductible.

g'' étant irréductible, I'' est nécessairement *non abélien*. On peut donc appliquer l'étude de V.Guillemin sur les idéaux non abéliens minimaux.

Pour la fibration $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^{n-m}$, I'' correspond aux Γ''-vecteurs qui sont verticaux. Les Γ''-champs verticaux induisent sur chaque fibre (sur $\boldsymbol{R}^m$) un *LAS* (avec la terminologie de [7]) *simple*, car g'' est irréductible et I'' minimal. Donc l'idéal maximal J'' de I'' est défini par les Γ''-champs verticaux et nuls sur une fibre $\boldsymbol{R}^m$. I''/J'' est donc l'algèbre formelle l'' d'un pseudogroupe de Lie plat simple sur $\boldsymbol{R}^m$, que nous noterons γ''.

Comme dans le paragraphe 7, on aura deux cas à distinguer, suivant que g'' admet ou non une structure complexe.

a) *Si g'' n'est pas un groupe complexe*, notons $x^1, \cdots, x^m$ les m premières coordonnées dans $\boldsymbol{R}^n$,$y^1, \cdots, y^{n-m}$ les suivantes. Les équations de Γ'' seront alors de la forme (à changement linéaire de variables près): $\varphi \in \Gamma'' \Leftrightarrow \varphi: (x, y) \mapsto (\psi(x, y), y + y_0)$ où:

(i) pour y donné $x \to \psi(x, y)$ appartient à γ'',

(ii) $\psi(x, y)$ dépend arbitrairement de certaines des coordonnées $y^1, \cdots, y^{n-m}$ et pas du tout des autres.

Une application du théorème de Frobenius permet, comme au paragraphe 7, de se ramener au cas où (ii) est remplacé par:

(iii) $\psi(x, y)$ dépend arbitrairement de y:

Sur la variété M considérée, la presque-Γ''-structure induit sur chaque feuille du feuilletage $\mathscr{F}''$ correspondant à $\boldsymbol{R}^m$ une presque-γ''-structure-donc une γ''-structure, γ'' étant simple-Si γ'' est de type fini, sur chaque feuille l'espace des coordonnées adaptées est *de dimension finie*. Les coordonnées locales cherchées sur M seront alors obtenues comme une section différentiable *arbitraire* d'un espace fibré différentiable de base N, variété quotient locale de M par le feuilletage $\mathscr{F}''$.

Si γ'' est de type infini, on est ramené à traiter le problème d'équivalence pour les G''-structures formellement plates (d'ordre 1!) du type suivant: G'' est le groupe des matrices

$$\begin{bmatrix} g^i_j & g^i_{j*} \\ 0 & \mathrm{id}_{n-m} \end{bmatrix}, \qquad i, j = 1, \cdots, m; j^* = m+1, \cdots, n,$$

où g^i_{j*} est *arbitraire* et $g'' = \{[g^i_j]\}$ irréductible de type infini (voir la classification des algèbres de ce type dans [7]). Ces problèmes d'équivalence standard se résolvent de façon élémentaire, compte tenu des théorèmes d'équivalence pour les g''-structures.

b) *Si g'' est un groupe complexe*, on se trouve dans une situation analogue au cas complexe du paragraphe 7. A changement linéaire de variables près, on aura une décomposition de la forme $\boldsymbol{R}^{n-m} = \boldsymbol{C}^p \oplus \boldsymbol{R}^q$ et les équations de Γ'' seront de la forme: $\varphi \in \Gamma'' \Leftrightarrow \varphi: (x, z, y) \mapsto (\psi(x, z, y), z + z_0, y + y_0)$ où:

(i) pour z, y donnés $x \mapsto \psi(x, z, y)$ appartient à γ'',

(ii) $\psi(x, z, y)$ dépend analytiquement de z,

(iii) $\psi(x, z, y)$ dépend arbitrairement de certaines des variables $y^{2p+1}, \cdots, y^{n-m}$, et pas du tout des autres.

Ici encore, en appliquant le théorème de Frobenius, on est ramené au cas où (iii) est remplacé par:

(iv) $\psi(x, z, y)$ dépend arbitrairement de y.

Le problème d'équivalence se présentera alors ainsi: N peut être considérée comme un ouvert de $\boldsymbol{C}^p \oplus \boldsymbol{R}^q$. Les préimages dans M des feuilles de N parallèles à $\boldsymbol{C}^p$ seront munies d'une structure presque complexe sans torsion (donc complexe) induite par la presque-Γ''-structure étudiée. Cette structure induite sera donc analytique, et on pourra, sur chacune de ces préimages, construire des coordonnées locales adaptées, qui seront localement définies par leur jet d'ordre infini en un point. On pourra alors comme au paragraphe 7 choisir ces coordonnées différentiablement en fonction de $y^{2p+1}, \cdots, y^{n+m}$.

Bibliographie

[1] D. Bernard, *Sur la géométrie différentielle des G-structures*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **10** (1960) 151–270.

[2] V. Guillemin, *The integrability problem for G-structures*, Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965) 544–560.

[3] ——, *A Jordan-Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras*, J. Differential Geometry **2** (1968) 313–345.

[4] V. Guillemin & S. Sternberg, *Deformation theory of pseudogroup structures*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 64, 1966.

[5] ——, *The Lewy counterexample and the local equivalence problem for G-structures*, J. Differential Geometry **1** (1967) 127–131.

[6] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966.

[7] I. Singer & S. Sternberg, *On the infinite groups of Lie and Cartan, Part* I (*The transitive groups*), J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LANGUEDOC, MONTPELLIER